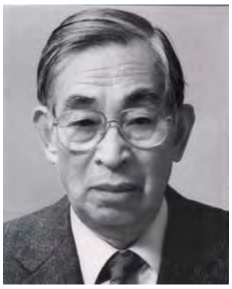
[2] Kleinberg, J. «Authoritative sources in a hyperlinked environment». *Journal of the ACM*, 46, (1999). Versió conferència: SODA (1998).
[3] Kleinberg, J. *The small-world phenomenon: Al algorithmic perspective*. *ACM Symposium on Theory of Computing*, 462–469, 2000.
[4] Kleinberg, J. «Navigation in the Small World». *Nature*, 406 (2000).
[5] Kleinberg, J. «Complex networks and decentralized search algorithms». *Proceedings of the ICM* (2006).
[6] Kleinberg, J.; Lawrence, S. «The structure of the Web». *Science*, 294 (2001).
[7] Kleinberg, J.; Tardos, E. *Algorithm design*. 2a ed. Addison-Wesley, 2005.
[8] Lohr, S. «Computing, 2016: What won't be possible?» *The New York Times* (31 d'octubre de 2006).
[9] «The Nevanlinna Prize Awarded». *Notices of the AMS*, 53 (9), (2006): 1045–1047.

J. Díaz
UPC

Premi Gauss 2006: Kiyosi Itô



El genial Kolmogorov deia que els matemàtics de cada generació tenien un camp molt petit per treballar, limitat, d'una banda, pels problemes trivials que no tenien cap interès, i de l'altra, pels problemes tan difícils que eren impossibles de resoldre amb les matemàtiques del seu temps. Però caldria afegir que els matemàtics genials —i, sense cap dubte, en Kolmogorov ho era— són aquells que posen un peu en l'impossible. Kiyosi Itô va posar un peu en l'impossible diverses vegades durant la seva llarga vida professional i per aquest motiu ha rebut un ampli reconeixement de la comunitat matemàtica. Se li han atorgat nombrosos premis entre els quals destaca el Premi Gauss concedit al darrer Congrés Internacional dels Matemàtics celebrat a Madrid el passat mes d'agost.

Itô va néixer a l'illa japonesa de Honsu el 7 de setembre de 1915 i va estudiar la carrera de matemàtiques a la Facultat de Ciències de la Universitat Imperial de Tòquio (1935-1938). Si tenim en compte la guerra entre el Japó i la Xina de 1937 a 1945, la Segona Guerra Mundial, i els foscos anys de postguerra al Japó, hom pot imaginar que els seus primers anys de matemàtic varen ser força difícils. Entre els anys 1938 i 1942 va treballar al Servei d'Estadística Governamental; segons explica (vegeu [3]), el director del Servei li deixava força temps per estudiar, i l'any 1942 va publicar dos treballs fonamentals: en el primer [4], que va ser la seva tesi doctoral, dóna una interpretació profundíssima dels processos amb increments independents introduïts per P. Lévy, a la llum de certs resultats de J. L. Doob. Cal dir que en aquells anys la teoria de la probabilitat tot just començava a considerar-se com una part seriosa de la matemàtica, en lloc d'un recull de fórmules i trucs per al càlcul de probabilitats, i que els processos estocàstics estaven en la seva primera infància. Molt pocs matemàtics japonesos estaven interessants en aquesta teoria, i Itô, per compte propi, estudià a Lévy, Kolmogorov, Doob i Feller. Si en el primer article s'aprecia el nervi d'un matemàtic fora de sèrie, en el segon ([5]) ja hi brilla la genialitat: posa els fonaments de la integral estocàstica i de la fórmula de canvi de variables (actualment anomenats *integral* i *fórmula d'Itô*), que després comentarem. Aquests treballs varen tardar anys a ser estudiats amb l'atenció que mereixien: referint-se al segon article ([5]), Itô diu «quan es va publicar només el va llegir el meu amic Maruyama». Continuant amb la seva trajectòria professional, el 1943 va ser nomenat professor ajudant a la Universitat de Nagoya, on va coincidir amb K. Yosida i també amb S. Kakutani, que havia retornat a Osaka des de Princeton a causa de la guerra. L'any 1952 va ser nomenat professor a la Universitat de Kyoto, de la qual es va jubilar el 1979. Durant aquells anys va estar també a Princeton (1954-1956), Stanford (1961-1964), Aarhus (1966-1969) i Cornell (1969-1975); en aquestes visites va coincidir amb els millors probabilistes del moment: Chung, Doob, Dynkin, Feller, el polifacètic Malliavin, McKean, Meyer, Neveu,... Diu que de tots ells va aprendre, però podem afegir que segur que també tots varen aprendre d'ell. Després de la seva jubilació a Kyoto, va ser professor a la Universitat Gakushuin de 1979 a 1985.

Si es llegeixen els seus treballs recollits en [3] hom veu que Itô va anar sempre tant al davant com al darrere dels seus contemporanis: al davant, obrint nous camins i atacant problemes al límit de l'impossible, i al darrere, posant el punt final a resultats dels altres. Potser de tots els treballs fonamentals d'Itô, els més interessants d'explicar, atès el seu ús en molts camps de coneixement, són els que tracten de la fórmula d'Itô i les equacions diferencials estocàstiques.

Començant pel principi, un procés estocàstic és un model matemàtic d'un fenomen que evoluciona aleatòriament al llarg del temps; per exemple, una persona que passeja per una ciutat i que a cada cruïlla elegeix si girar a la dreta o a l'esquerra tirant una moneda; el moviment d'aquesta persona es pot estudiar mitjançant les lleis de l'atzar. Així, es pot calcular la probabilitat que després d'un temps determinat estigui en un punt concret de la ciutat, el temps mitjà que tardarà a arribar a un barri determinat, etc. La millor manera de mirar-se aquest recorregut aleatori no és instant per instant (la persona tirant la moneda a cada cruïlla), sinó considerant el conjunt de tots els recorreguts possibles i definint-hi una probabilitat. Cada recorregut possible s'anomena *una trajectòria del procés estocàstic*.

El procés estocàstic que atrau l'interès d'Itô és un model del moviment brownià, que s'anomena *procés de Wiener* (o també, *moviment brownià*, però hi ha altres models del mateix fenomen, com ara el d'Ornstein-Uhlenbeck). Com és ben conegut, el moviment brownià, que no va ser descobert per Brown, és un moviment ràpid i altament irregular que es pot observar, tal com Brown va fer cap a l'any 1820, mirant amb el microscopi partícules de pol·len en aigua; al principi es creia que el moviment era degut al fet que les partícules de pol·len estaven vives, però Brown va comprovar també el moviment en partícules inorgàniques (per a tota aquesta història vegeu [6]). Durant la segona meitat del segle XIX molts científics varen treballar sobre el moviment brownià i va començar-se a forjar l'explicació actual que el moviment és a causa del bombardeig de les molècules del líquid sobre la partícula de pol·len; però tot era força difícil d'expressar matemàticament i de comprovar experimentalment: la gran dificultat matemàtica era que «la trajectòria semblava que no tenia tangent» i, per tant, apareixen corbes contínues sense derivada en cap punt. Aquí cal citar L. Bachelier, que en un sorprenent llibre titulat *Théorie de la spéculation* (1900) va proposar un model per al moviment brownià i la seva utilització en finances, avantçant-se setanta anys a la matemàtica financera que avui té tanta importància; però dissortadament va passar desapercebut. El següent pas fonamental el va donar Einstein el 1905, el seu any extraordinari. En un magnífic article [2] que té per objectiu «trobar fets que garanteixin tant com sigui possible l'existència d'àtoms de dimensions finites determinades», Einstein, que no coneixia el moviment brownià, el va descobrir teòricament i va explicar la seva naturalesa, amb un raonament (alhora físic i matemàtic) que esquiva la no-derivabilitat de la trajectòria. Alguns dels millors matemàtics de principis de segle XX, com ara Borel, Lebesgue o Lévy treballaven per donar forma matemàtica rigorosa a les conclusions d'Einstein sobre el moviment brownià, però va ser Norbert Wiener els anys 1923-1925 qui ho va aconseguir, definint una probabilitat a l'espai de les funcions contínues; aquests van ser uns resultats extremadament difícils i d'una importància cabdal. De fet, amb Wiener va començar la formulació matemàtica actual del moviment brownià. Finalment, les propietats més fines varen ser descobertes per Paul Lévy els anys 1930-1950.

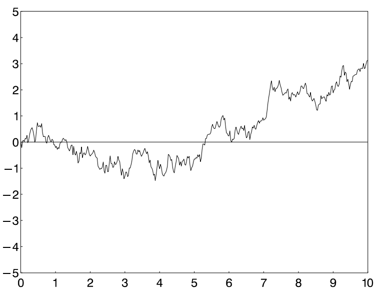


Figura 1. Aproximació a una trajectòria browniana.

La formulació del procés de Wiener és, sense entrar gaire en detalls tècnics, la següent: el primer que es fa és separar el moviment de la partícula a l'espai en tres components independents, una en cada direcció. Considerem així una partícula que es mou sobre un eix, i designem per $W(t)$ la posició de la partícula a l'instant t. Suposem que a l'instant 0 està a l'origen ($W(0) = 0$), i fem un gràfic temps-espai per seguir el moviment de la partícula. El dibuix no es pot fer, ja que, com hem dit, la corba no té derivada en cap punt, però una aproximació seria com la de la figura 1.

Però aquest gràfic és d'una de les infinites possibles trajectòries de la partícula, i, de fet, seria millor dir que hem representat la funció

$$\begin{aligned} W_\omega : [0,T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow W_\omega(t) \end{aligned}$$

on la variable $\omega \in \Omega$ es refereix al factor aleatori, al fet que representem una trajectòria escollida d'acord amb una probabilitat a Ω. El model suposa que si prenem n instants del temps, $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, aleshores els increments $W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \ldots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ són independents i que $W(t_i) - W(t_{i-1})$ és una variable normal de mitjana 0 i variància $t_i - t_{i-1}$. Així, es pot calcular, per exemple, la probabilitat que en determinat temps la partícula estigui en determinada zona.

Per continuar amb la nostra explicació ens calen unes nocions sobre la integral de Riemann-Stieltjes d'una funció respecte d'una altra (aquí comentarem una versió simplificada; per a la teoria general vegeu, per exemple, Apostol [1]). Siguin $h, g : [0,T] \to \mathbb{R}$ dues funcions, h contínua i g de de variació fitada (per exemple, una funció monòtona o una funció amb derivada contínua en tots els punts). Aleshores es pot definir la integral $\int_0^T h(t)\, dg(t)$ de la manera següent:

$$\int_0^T h(t)\, dg(t) = \lim \sum_i h(s_i)\big(g(t_{i+1}) - g(t_i)\big), \quad (1)$$

on el límit es pren sobre qualsevol successió de particions de $[0,T]$ de la forma $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$, amb el pas tendint a zero, i $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Aquesta integral té pràcticament totes les propietats de la integral ordinària de Riemann. De fet, quan g és diferenciable amb derivada contínua, la integral de Riemann-Stieltjes es redueix a una integral de Riemann,

$$\int_0^T h(t)\, dg(t) = \int_0^T h(t) g'(t)\, dt.$$

Un exemple que utilitzarem després és el següent: sigui $g(t)$ contínua de variació fitada, amb $g(0) = 0$. Llavors:

$$\int_0^T g(t)\, dg(t) = \frac{1}{2}(g(T))^2. \quad (2)$$

Ens interessa una integral del tipus $\int_0^T f(t)\, dW_\omega(t)$, però el plantejament anterior (en general) no funciona ja que $W_\omega(t)$ (amb ω fixat) té variació infinita. Wiener, però, en la seva construcció de la probabilitat a l'espai de les funcions contínues, va necessitar aquesta integral i la va definir mitjançant tècniques de probabilitats, és a dir, no fixant la ω, sinó (simplificant molt) utilitzant un límit semblant a (1) però en un sentit probabilístic, concretament en mitjana quadràtica; observem que el resultat de la integral és una variable aleatòria en lloc d'un nombre. Itô defineix una integral similar on permet que l'integrant sigui també un procés estocàstic (amb certes restriccions); concretament, defineix una integral de la forma $\int_0^T H(t)\, dW(t)$, on $H(t)$ és un procés estocàstic. Aquesta integral és lineal, però ja no segueix totes les regles habituals. Per exemple, a diferència de (2),

$$\int_0^T W(t)\, dW(t) = \frac{1}{2}(W(T))^2 - \frac{1}{2}T, \quad (3)$$

on el segon terme de la dreta apareix a causa de l'extrema irregularitat de les trajectòries brownianes; tècnicament, les trajectòries brownianes tenen variació de primer ordre infinita, però variació de segon ordre finita, mentre que el càlcul diferencial ordinari s'ocupa de funcions que tenen variació primera finita i variació de segon ordre zero.

Amb l'objectiu que aquesta integral sigui útil, Itô formula les regles de l'anomenat *càlcul estocàstic* que, com hem comentat, seran diferents de les del càlcul ordinari. Retornem per un moment a les funcions reals ordinàries i siguin $g\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ una funció contínua i estrictament monòtona (llavors serà de variació fitada) i $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable amb derivada contínua. Aleshores una manera d'escriure la fórmula del canvi de variables (o la regla de la cadena) és

$$f(g(T)) = f(g(0)) + \int_0^T f'(g(t))\, dg(t).$$

Per exemple, per a $f(x) = x^2$, la fórmula anterior dóna

$$\big(g(T)\big)^2 = \big(g(0)\big)^2 + 2\int_0^T g(t)\,dg(t),$$

que quan $g(0) = 0$ coincideix amb (2). En el cas aleatori aquesta fórmula no és correcta, però Itô demostra que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és dues vegades diferenciable, amb la segona derivada contínua, aleshores

$$f(W(T)) = f(0) + \int_0^T f'(W(t))\,dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f''(W(t))\,dt,$$

on, la primera integral és una integral d'Itô (estem integrant un procés estocàstic) i la segona apareix a causa de la variació quadràtica del brownià. Aquesta és la famosa fórmula (o lema) d'Itô del canvi de variables. Així, per al cas $f(x) = x^2$ tenim, d'acord amb (3),

$$\big(W(T)\big)^2 = 2\int_0^t W(t)\,dW(t) + T.$$

(Recordeu que $W(0) = 0$). Finalment, afegim que la integral d'Itô permet donar un sentit rigorós a equacions diferencials de la forma

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t),$$

on f i g són funcions conegudes i $X(t)$ és el procés estocàstic incògnita. Informalment, a una equació diferencial ordinària li hem afegit un terme aleatori. Itô també es va ocupar d'aquestes equacions. Per a una introducció a les integrals d'Itô i les equacions diferencials estocàstiques vegeu, per exemple, Oksendal [7].

Referències

[1] Apostol, T. M. *Análisis matemático.* Barcelona: Editorial Reverté, 1960.

[2] Einstein, A. «Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen». *Annalen der Physik*, 17 (1905), 549–560. Traducció al català a *Einstein en català*. Barcelona: Edicions de la Revista de Física, 1998.

[3] Itô, K. *Selected papers.* Nova York: Springer, 1987. D. W. Stroock i S. R. S. Varadhan [ed].

[4] Itô, K. «On Stochastic Processes (infinitely divisible laws of probability)». [Japó], *Journ. Math.* xviii (1942), 261–301. Reproduït a [3].

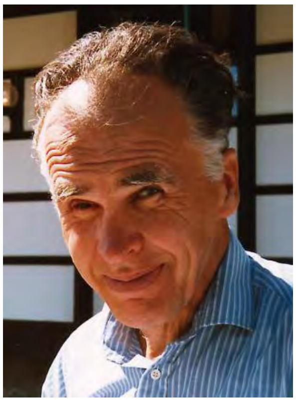
[5] Itô, K. «Differential equations determining a Markov process». *Journ. Pan-Japan Math. Coll.*, 1077 (1942). Reproduït a [3].

[6] Nelson, E. *Dynamical theories of Brownian motion.* Princeton, Nova Jersey: Princenton University Press, 1972.

[7] Oksendal, B, *Stochastic differential equations.* Springer, 1985.

Frederic Utzet
UAB

Premi Abel 2006: Lennart Carleson



El passat 23 de maig a la Universitat d'Oslo, el professor Lennart Carleson, un dels matemàtics més influents del segle xx, va rebre el Premi Abel 2006 pels seus profunds resultats en anàlisi harmònica i en sistemes dinàmics.

El Premi Abel de l'Acadèmia de Ciències i Lletres de Noruega fou atorgat per primer cop el 2003, en commemoració del dos-cents aniversari del naixement de Niels Henrik Abel, famós matemàtic d'aquesta nacionalitat, mort prematurament a l'edat de vint-i-sis anys. És considerat per molts com l'equivalent al Premi Nobel de Matemàtiques, encara que en això competeix amb un altre guardó de més llarga història (si bé de menor quantia econòmica), la Medalla Fields.

Durant els anys seixanta, Carleson completà el projecte iniciat més de cent-cinquanta anys abans per un matemàtic francès contemporani d'Abel: Jean Baptiste Fourier. Fourier participà a les campanyes de Napoleó a Egipte, com a amic personal i conseller seu. La seva aporta-